ΑΣΚΗΣΗ 1 (ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ)

Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=x^2-y^2$
και έστω ο μοναδιαίος κύκλος (S) με κέντρο το $O(0,0)$
Να βρεθεί τα τοπ. ακρότατα της $f|S$.

ΛΥΣΗ

Το S είναι καμπύλη στάθμης της $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x,y)=x^2+y^2-1=0$$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(2x,-2y)$$

και

$$\nabla g(x,y)=(2x,2y)$$

Βλέπουμε, ότι $\nabla g(x,y)\neq 0$ εάν $x^2+y^2=1$

Άρα, βάσει πολλαπλ. Lagrange, πρέπει να βρούμε ένα λ, τέτοιο ώστε:

$$\nabla f(x,y)=\lambda\cdot\nabla g(x,y)\Rightarrow(2x,-2y)=\lambda(2x,2y)\quad(1)$$

ενώ $x^2+y^2=1$ (2)

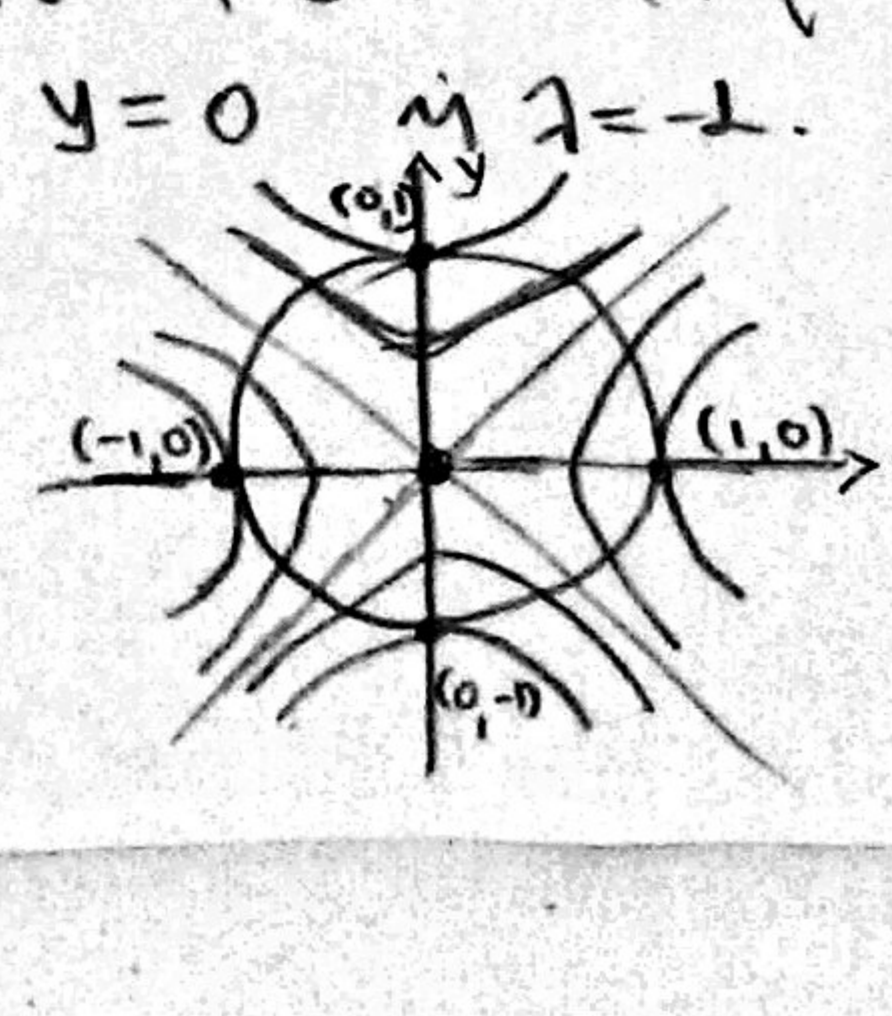
(1) $2x=2x\cdot\lambda\Rightarrow 2x\cdot\lambda-2x=0\Rightarrow x=0$ ή $\lambda=1$

(1)' $-2y=2y\cdot\lambda\Rightarrow 2y\lambda+2y=0\Rightarrow y=0$ ή $\lambda=-1$

- Αν $x=0$ στην (2) $y=\pm1$ και στην (1)': $\lambda=-1$
- Αν $\lambda=1$ στην (1)' $y=0$ και στην (2): $x=\pm1$

Άρα, καταλήγουμε στα σημεία: $(0,\pm1)$ και $(\pm1,0)$
όμοια και αν $y=0$ ή $\lambda=-1$.

Γεωμετρικά:



$f(0,\pm1)=-1$ ελαχ.

$f(\pm1,0)=+1$ μεγ.

ΑΣΚΗΣΗ 2 (ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ)

Μεγιστοποιήστε τη συνάρτηση $f(x,y,z) = x+z$ υπό τη συνθήκη $x^2+y^2+z^2=1$ ← μοναδιαία σφαίρα.

ΛΥΣΗ

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Πολλ/στων Lagrange παίρνουμε ότι:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z) \Rightarrow (1,0,1) = \lambda(2x,2y,2z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = 0 \\ 2\lambda z = 1 \end{cases} \overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} y = 0 \\ 2\lambda x = 2\lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \quad (1) \end{cases}$$

και $x^2+y^2+z^2=1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = z$

Άρα, έχουμε πιθανά ακρότατα τα σημεία

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ και } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

όπου

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$$

↓ ελάχιστο ↓ μέγιστο

ΑΣΚΗΣΗ 3η (ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ)

Βρείτε το μέγιστο δυνατό όγκο ενός ορθογώνιου κύβου, αν είναι γνωστό ότι το εμβαδόν της επιφάνειας του είναι 10 m^2.

ΛΥΣΗ

Προφανώς, ο όγκος του θα είναι

$f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z \quad , \ (\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$

Ενώ ο περιορισμός μας είναι το σύνολο

$S' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(xy + xz + yz) = 10\} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot y + x \cdot z + yz = 5\}$

Άρα, από Θ. Lagrange: $\nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(y+x) \end{cases}$

και $xy + xz + yz = 5$

Πρώτα από όλα $x \neq 0$ γιατί αν $x = 0$ τότε $yz = 5$ και $0 = \lambda z$, οπότε $\lambda = 0$ και $yz = 0$. Όμοια, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x+y \neq 0$ κλπ. Απαλείφοντας το λ

από τις 2 πρώτες εξισώσεις παίρνουμε:

$\frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z} \Rightarrow x = y$ και ομοίως, $y = z$

Με αντικατάσταση, στην τελευταία εξίσωση:

$3x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}} = y = z$.

Άρα, $f(x,y,z) = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^3}$. όπου γεωμετρικά είναι

ο μέγιστος όγκος που λαμβάνει ο ορθογώνιος κύβος

ΑΣΚΗΣΗ 4 (ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ)

Βρείτε τα ακρότατα της $f(x,y,z)=x+y+z$ υπό τις συνθήκες $x^2+y^2=2$ και $x+z=1$

ΛΥΣΗ

Εδώ υπάρχουν 2 περιορισμοί:

$g_1(x,y,z)= x^2+y^2-2 =0$

$g_2(x,y,z)= x+z-1 =0$.

Άρα, κάνοντας χρήση πολ/στων Lagrange, έχουμε:

$\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \cdot \nabla g_2(x,y,z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1,1,1) = \lambda_1 \cdot (2x,2y,0) + \lambda_2 \cdot (1,0,1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 x + \lambda_2 \cdot 1 = 1 \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 \cdot 0 = 1 \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 y = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

καθώς, $x^2+y^2=2$ και $x+z=1$

$\lambda_2 = 1 \Rightarrow 2\lambda_1 x + 1 = 1 \Rightarrow 2\lambda_1 \cdot x = 0$ (*)

όπου $\lambda_1 \neq 0$ (διότι αν $\lambda_1 = 0$ τότε $0=1$ στη 2η εξίσωση).

(*) $\Rightarrow x=0 \Rightarrow x^2+y^2=2 \xRightarrow{x=0} y=\pm\sqrt{2}$ και $z=1$

Άρα, $(0,\sqrt{2},1)$ και $(0,-\sqrt{2},1)$ σημεία ακροτάτων

και μάλιστα, $f(0,\sqrt{2},1)=\sqrt{2}+1 \leftarrow$ Max

$f(0,-\sqrt{2},1)=-\sqrt{2}+1 \leftarrow$ Min.